



结构动力学工作室

Structural Dynamic Studio

模态参数识别及有限元模型修正

史治宇 教授

南京航空航天大学





模态参数识别



线性时不变系统

理论建模



有限元模型

试验建模



参数识别





模态参数识别

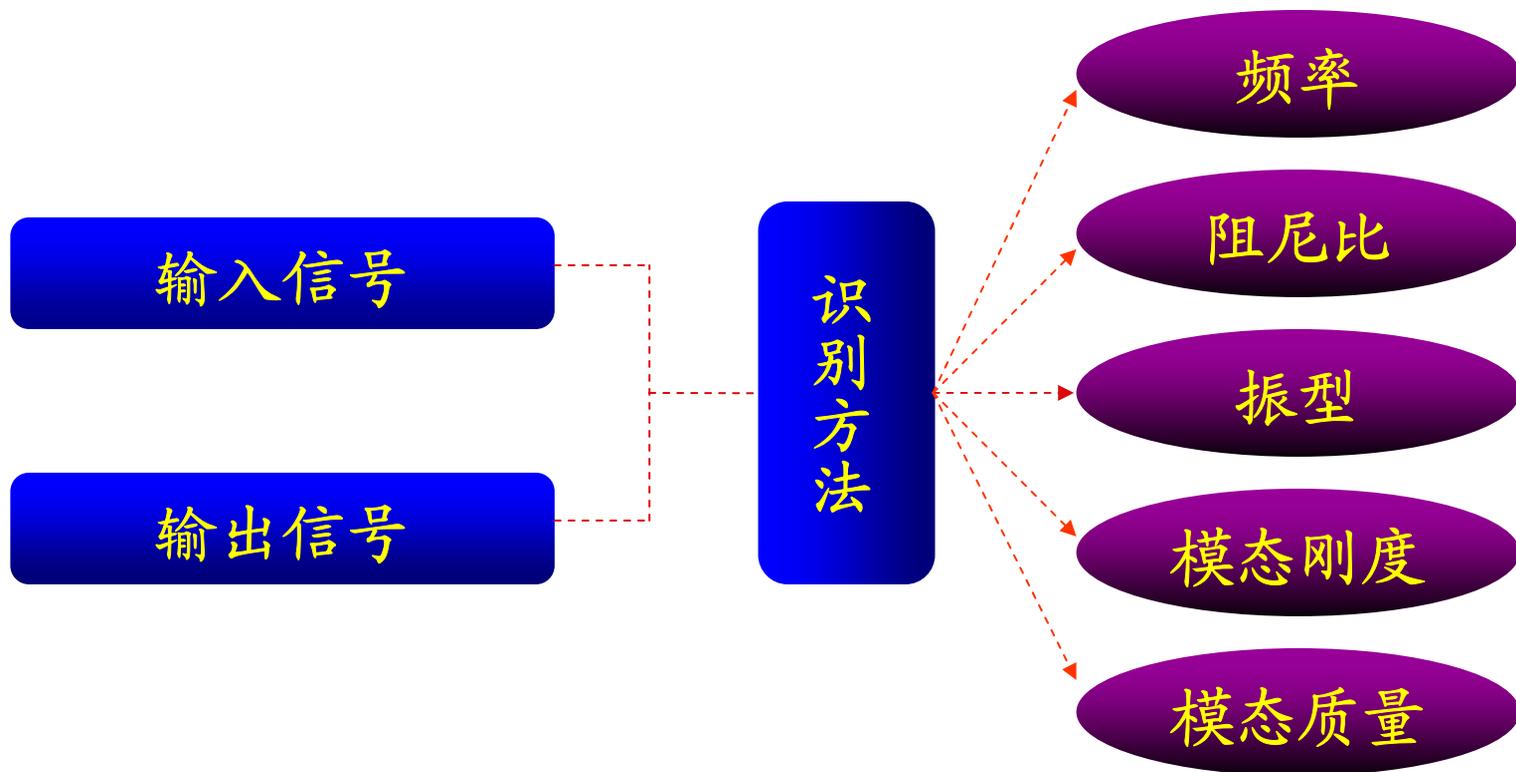
模态参数识别

模态参数识别: 是指对振动系统进行激振（即输入），通过测量获得系统的输入、输出（或仅仅是输出）信号数据，经过对他们进行处理和分析，依据不同的识别模型和方法，识别出系统的结构模态参数（如频率、阻尼比、振型、模态刚度、模态质量等）。这类问题为结构动力学第一类逆问题。





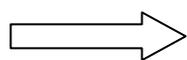
模态参数识别



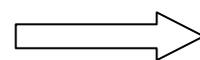


模态参数识别

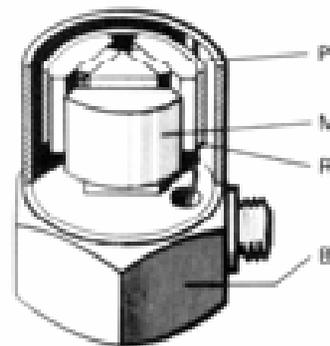
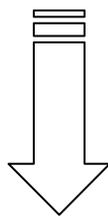
激励



系统



响应



频率 阻尼比 振型 模态刚度 模态质量



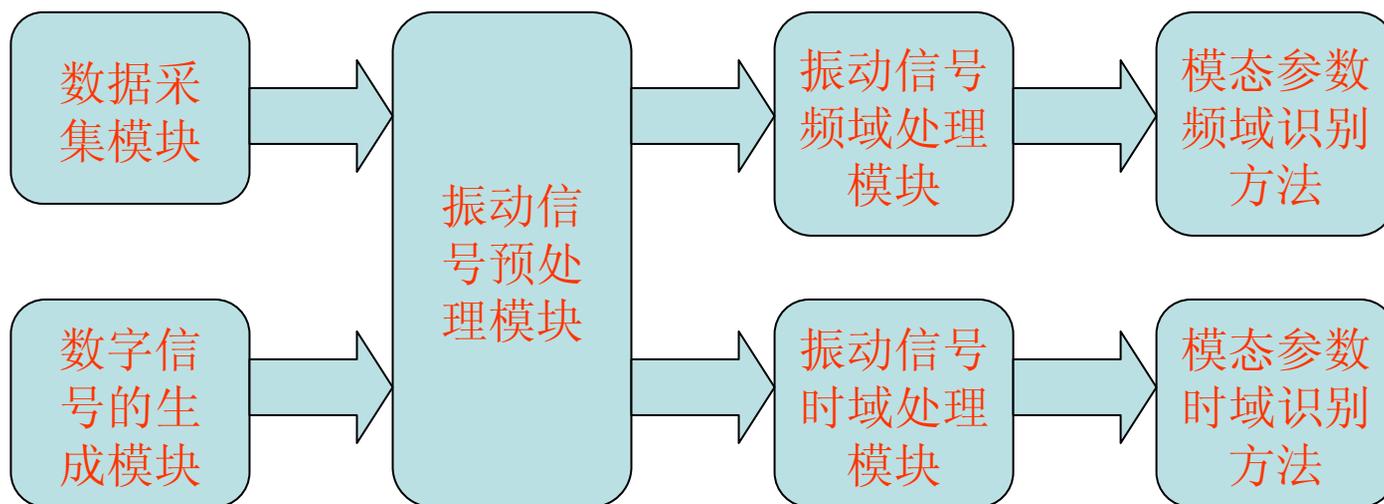
结构动力学工作室

Structural Dynamic Studio



模态参数识别

模态参数识别功能模块示意图





模态参数识别

模态参数识别方法分类

按照识别域不同：时域和频域

按照输入输出不同：EMA（试验模态分析方法）和OMA（运行模态分析方法）

按照输入输出数目不同：
SISO, SIMO, MISO, MIMO





模态参数识别（基本理论）

单自由度系统:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = f$$

傅里叶变换

频响函数

$$(k - m\omega^2 + jc\omega)X(\omega) = F(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{k - m\omega^2 + jc\omega} = \frac{1}{m(\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega)}$$

脉冲响应函数

傅里叶反变换

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$





模态参数识别（基本理论）

多自由度系统:

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i \Phi_i^T}{k_i - m_i \omega^2 + j c_i \omega}$$

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i \Phi_i^T}{(s - \lambda_i)(s - \lambda_i^*)}$$

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_{di} \quad \sigma_i = -\xi_i \omega_{0i} \quad \omega_{di} = \omega_{0i} \sqrt{1 - \xi_i^2}$$

有理分式:

$$H_{rp}(j\omega_k) = \frac{\sum_{q=1}^m (j\omega_k)^{q-1} X_q}{\sum_{q=1}^{m+1} (j\omega_k)^{q-1} Y_q}$$

部分分式:

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mathbf{A}_i}{s - \lambda_i} + \frac{\mathbf{A}_i^*}{s - \lambda_i^*} \right)$$





模态参数识别（基本理论）

多自由度系统脉冲响应函数:

$$\mathbf{h}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i \varphi_i^T}{m_i \omega_{di}} e^{-\xi_i \omega_{0i} t} \sin \omega_{di} t$$

多自由度系统自由响应:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i \psi_i e^{\lambda_i t} + \alpha_i^* \psi_i^* e^{\lambda_i^* t} \right)$$





模态参数识别（基本理论）

多自由度系统:

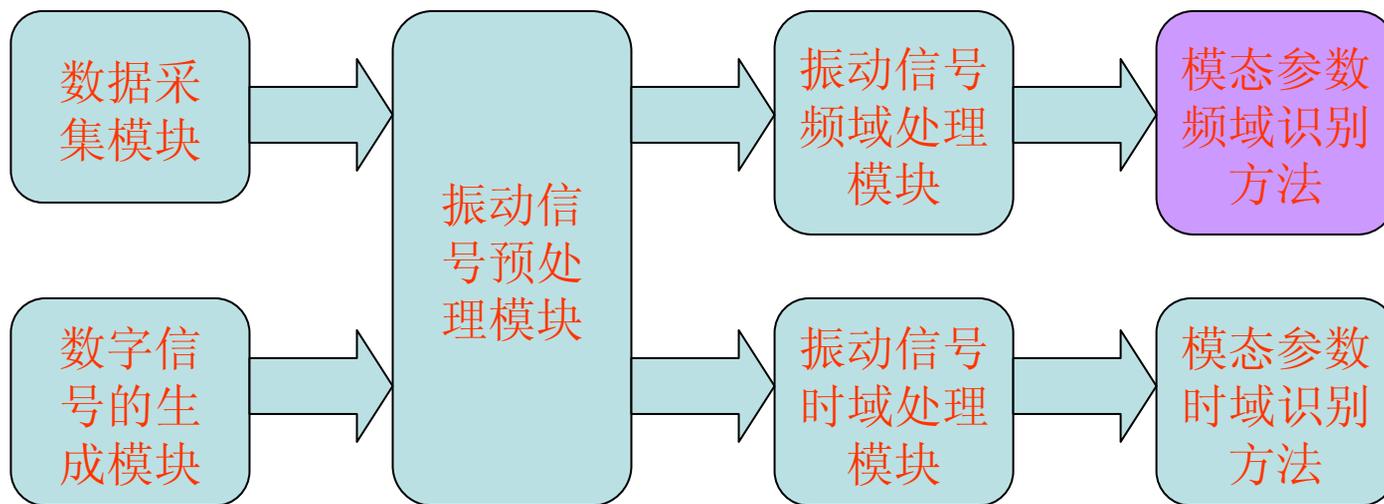
$$H_{rp}(w) = \sum_{i=1}^n \frac{C_{rpi}}{\omega_{mi}^2 - \omega^2 + jD}$$

阻尼模型\参数	C_{rpi}	D_i	ω_{mi}
无阻尼	实常数	0	$\omega_{mi} = \omega_{0i}$
粘性比例阻尼	实常数	实数 (w)	$\omega_{mi} = \omega_{0i}$
结构比例阻尼	实常数	实常数	$\omega_{mi} = \omega_{0i}$
任意结构阻尼	复常数	实常数	$\omega_{mi} \neq \omega_{0i}$
任意粘性阻尼	复数 (w)	实数 (w)	$\omega_{mi} \neq \omega_{0i}$





模态参数识别 (EMA)



SISO: 70年代前发展和使用的方法

主要思路:

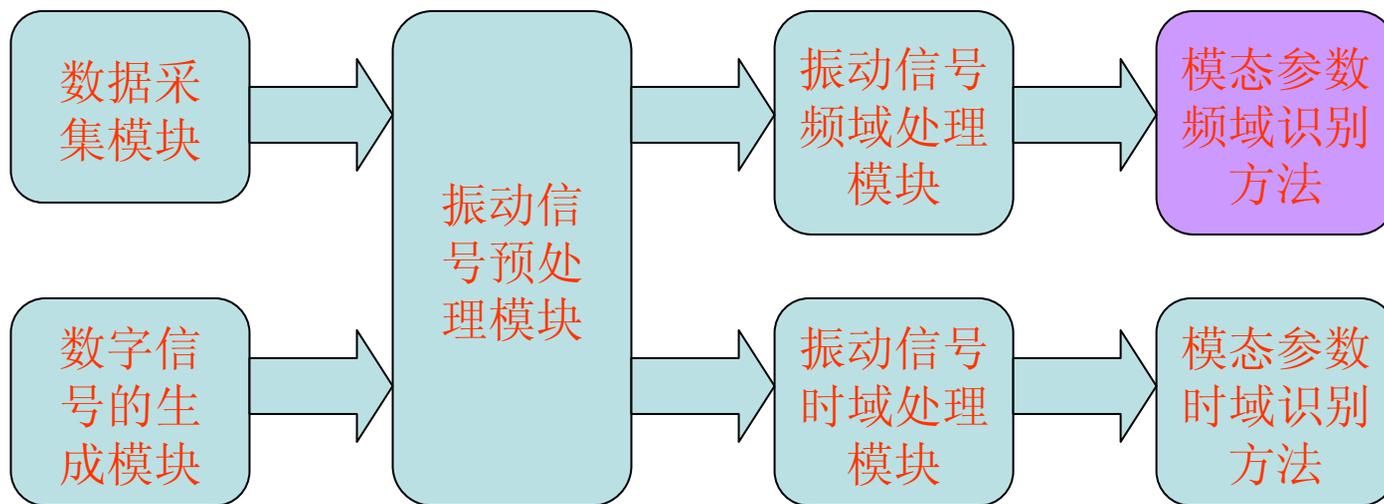
传递函数展成部分分式 ← 非线性**LS**迭代求解

传递函数展成有理分式 ← 线性**LS**直接求解





模态参数识别 (EMA)



主要方法有：峰值法、分量法、导纳圆法、单 / 多模态直接识别法（RFP<Rational Fraction Polynomial>、RFOP<Polyreference Frequency Domain >）、单 / 多模态迭代识别法等。

缺点：工作量大、阻尼误差大，属于局部法





模态参数识别（导纳圆法）

根据实测频响函数数据，用理想的圆去拟合实测的导纳圆，但由于模态测试不可避免的误差，频响函数矢端不一定都落在理论圆上，从而必须找出一个理论圆，使得圆上各相应点的数值与实测值之间的误差最小，即采用最小二乘原理使其误差的平方最小的原则进行拟合。

以频响函数的实部为横轴，虚部位纵轴绘出导纳圆图。首先构造一个理想圆方程：令 $H_{lp}^R(\omega) = x$ ， $H_{lp}^I(\omega) = y$ ；有：

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

用实测数据 x_K, y_K 带入上式的 x, y 必然引起误差

$$(x_K - x_0)^2 + (y_K - y_0)^2 \neq R^2$$

偏差为：
$$e_K = (x_K - x_0)^2 + (y_K - y_0)^2 - R^2$$

$$e_K = x_K^2 + y_K^2 + ax_K + by_K + c$$

令





模态参数识别（导纳圆法）

用所有测试数据点的总误差平方和来构造目标函数：

$$E = \sum_{K=1}^m (x_K^2 + y_K^2 + ax_K + by_K + c)^2$$

使 E 最小必须满足下列关系式：

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \frac{\partial E}{\partial b} = 0, \frac{\partial E}{\partial c} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sum x_K^2 & \sum x_K y_K & \sum x_K \\ \sum x_K y_K & \sum y_K^2 & \sum y_K \\ \sum x_K & \sum y_K & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sum (x_K^2 + x_K y_K) \\ -\sum (x_K y_K + y_K^2) \\ -\sum (x_K^2 + y_K^2) \end{Bmatrix}$$

解方程可求得 a 、 b 、 c 三个参数，从而确定拟合圆的圆心坐标和半径。





模态参数识别（导纳圆法）

固有频率：可根据拟合圆曲线弧长随频率变化最大处来确定

模态振型： $\phi_{pr} \approx 2\{R_{lp}\}_r \frac{K_r g_r}{\{\phi_{lp}\}_r}$

常数

第 r 阶模态振型可以由各测点导纳圆半径组成的归一化向量求出。

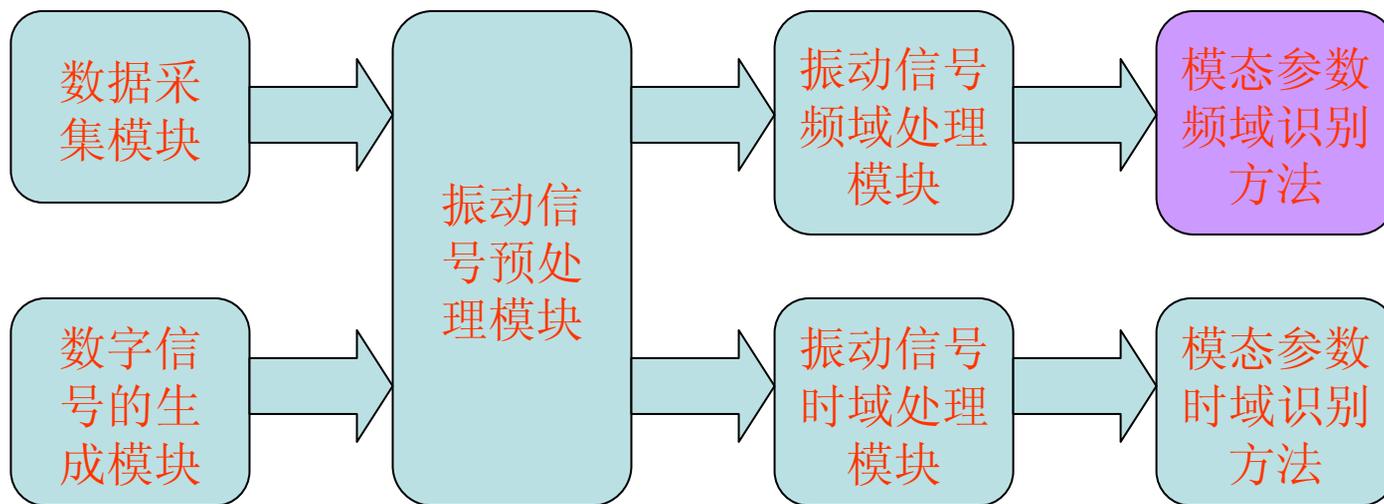
模态阻尼：在固有频率 ω_r 左右两侧附近分别取 ω_a, ω_b 两点满足关系 $\omega_a < \omega_r < \omega_b$ ，在导纳圆中对应的圆心角可表示为 α_a, α_b ，有：

$$g_r = \frac{\omega_b^2 - \omega_a^2}{\omega_r^2} \frac{1}{\tan \frac{\alpha_a}{2} + \tan \frac{\alpha_b}{2}} \approx \frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_r} \frac{1}{\tan \frac{\alpha_a}{2} + \tan \frac{\alpha_b}{2}}$$





模态参数识别 (EMA)



SIMO: 80年代发展的模态频率和阻尼Global Method

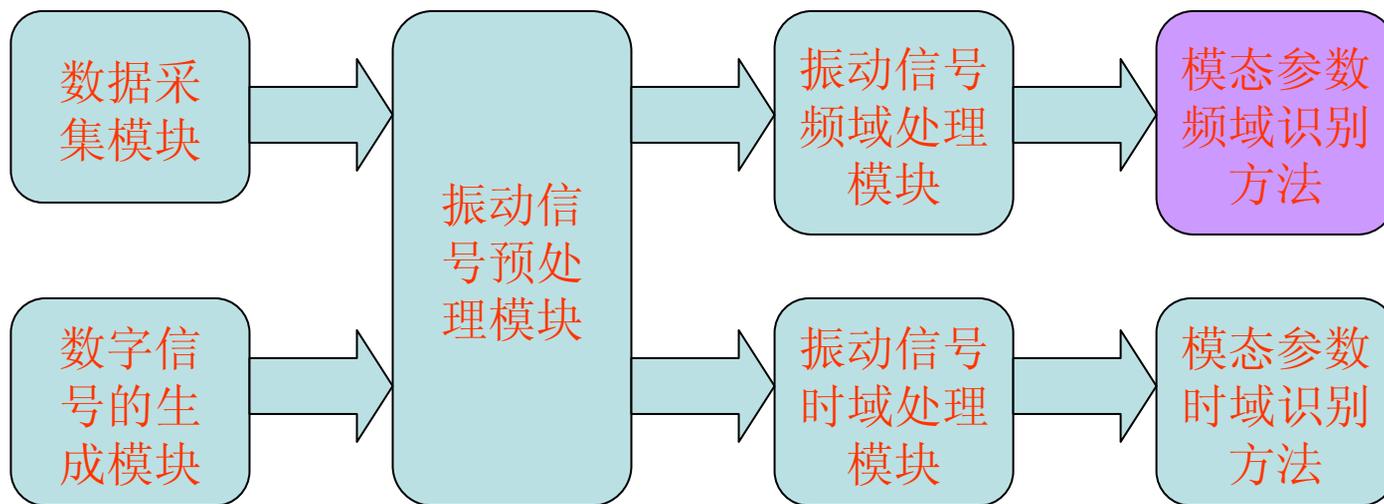
优点: 对所有测点数据同时处理得到的模态频率和阻尼更精确; 振型精度也提高。

缺点: 模态遗漏、重频模态不能识别。





模态参数识别 (EMA)



主要思路:

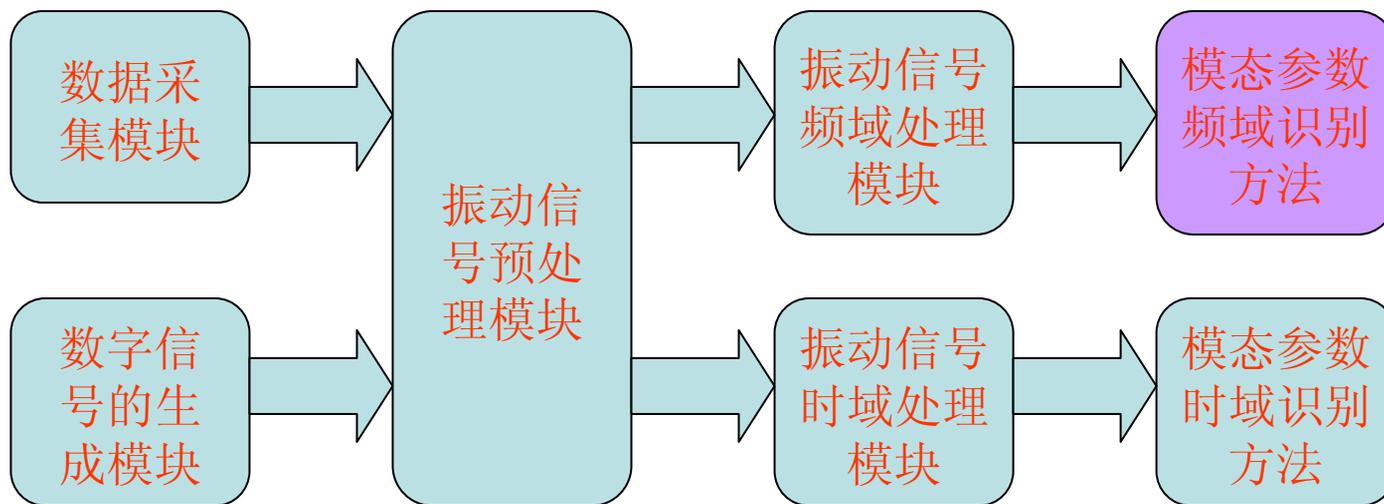
- 方法1: 简单的方法 - 选取某个各阶模态都具有较大响应, 用来识别模态频率和阻尼, 作为总体的。<B&K公司>
- 方法2: 响应迭加法 - 把所有各测点的频响函数迭加平均, 然后用来说识别总体模态频率和阻尼。<STI-11/23>

主要方法: 1982年Richardson & Formenti 提出的有理分式正交多项式法RFOP。





模态参数识别 (EMA)



MIMO: 80年代以后随着多点激振测试技术的实现, 相应发展的第三代模态识别技术, 真正的**Global Method**。

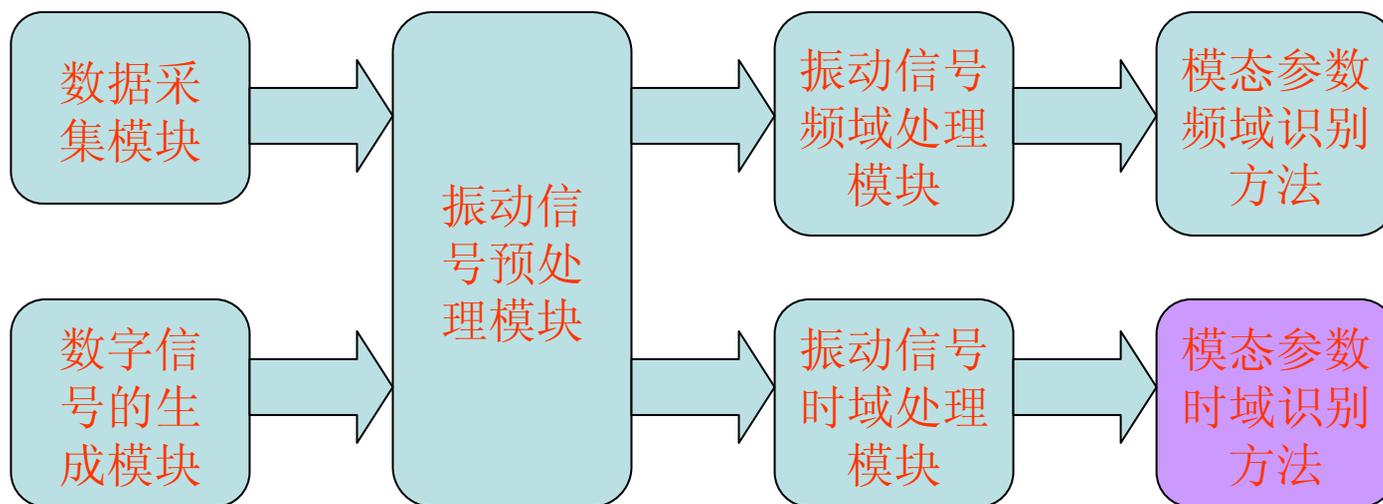
主要方法: **1985年**法国**Fillod & Lalement** 提出了总体的频率**MIMO**识别方法。

1985年李岳峰提出了**MIMO**频响函数全相干估计技术。





模态参数识别 (EMA)



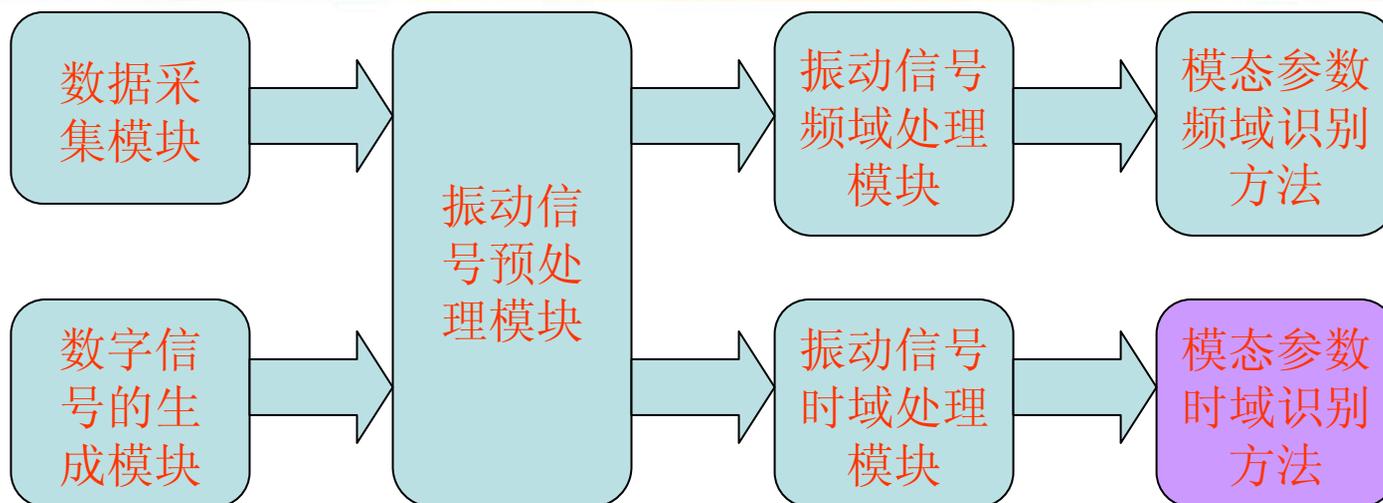
时域法: 依据系统响应的时间历程（如自由响应、脉冲响应等）来确定系统的模态参数。

SISO: 60年代末至70年代中，采用最小二乘曲线拟合法，依据自由响应数据直接识别频率和阻尼。非线性方法收敛慢、时间长。





模态参数识别 (EMA)

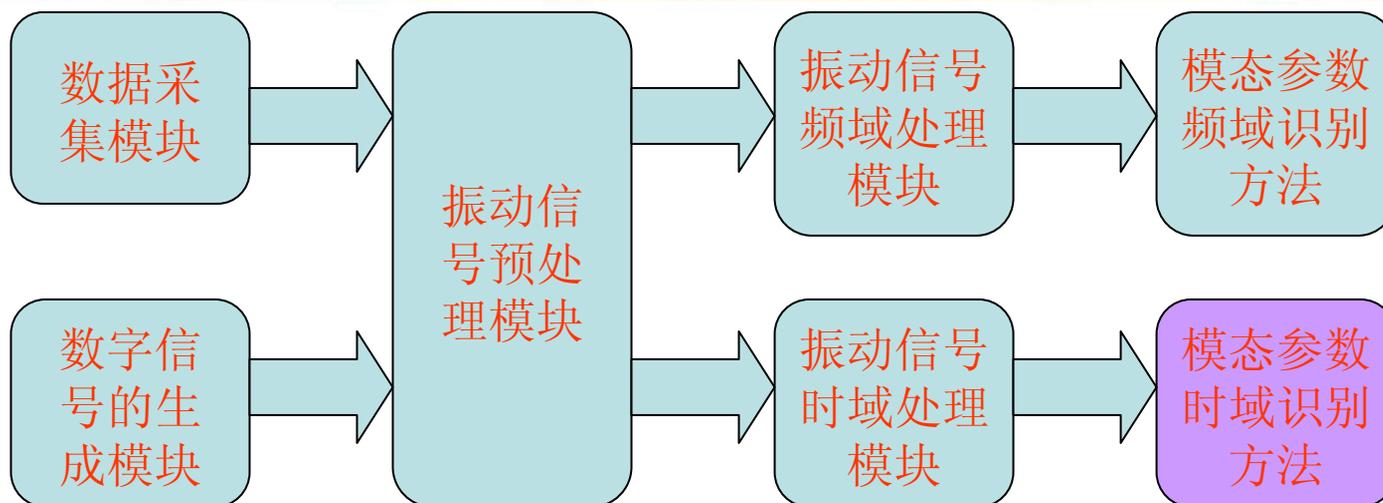


- 1、1973年Ibrahim提出了一种利用位移、速度、加速度自由响应识别系统复模态参数的时域法;
- 2、1977年Ibrahim提出了利用位移、速度、加速度自由响应之一识别系统复模态参数的时域法ITD法;
- 3、1977年又应用随机减量技术获得随机激振下系统的由响应识别系统复模态参数;
- 4、1985年又提出了省时的STD法。





模态参数识别 (EMA)

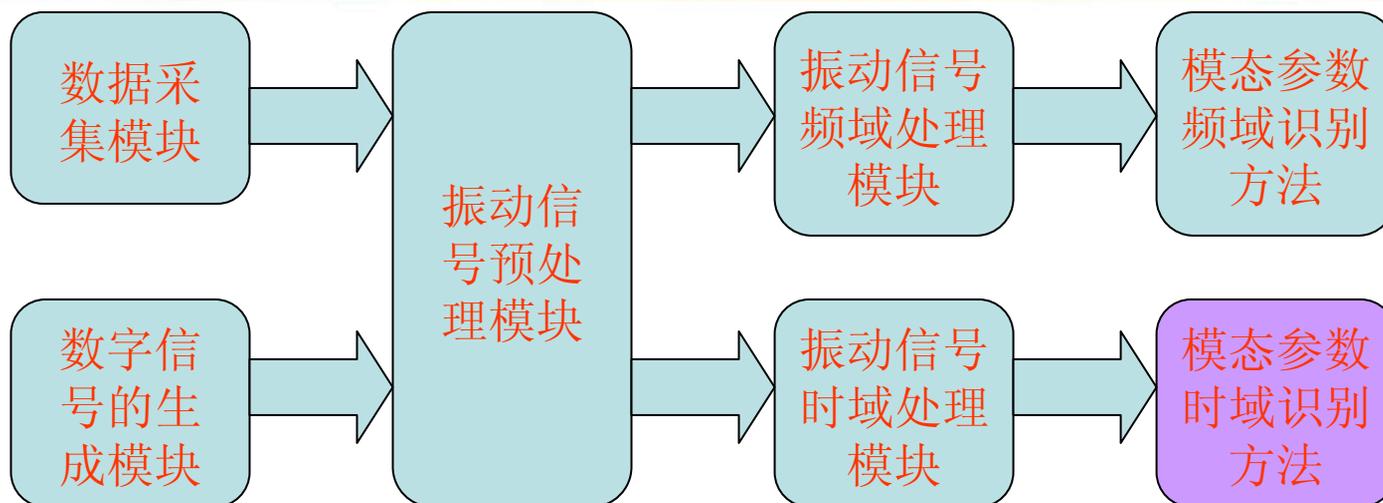


- 5、70年代末发展了复指数法，它是数学上的普罗尼 (Prony) 法在参数识别中的应用；
- 6、1984年包益民、周传荣对Prony法进行了改进，提出了双递推模态参数识别的时域方法；
- 7、同一时期还有基于ARMA模型的差分方程法。





模态参数识别 (EMA)



MIMO: 1982年美国H. Vold提出多参点复指数法 (PRCE <Polyreference Complex Exponential>)。
1984年NASA的LANGLEY研究中心提出了ERA 法 <Eigensystem Realization Algorithm>。





模态参数识别 (ITD)

根据对各测点得到的自由响应信号进行一定方式的采样, 得到自由响应数据矩阵, 由响应与特征值之间的复指数关系建立特征值与特征向量, 再根据模型特征值与振动系统特征值之间的关系, 求出振动系统的模态参数。

自由响应数据矩阵:

$$\begin{bmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \cdots & x_1(t_{2N}) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \cdots & x_2(t_{2N}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_N(t_1) & x_N(t_2) & \cdots & x_N(t_{2N}) \end{bmatrix} = [X]$$

结构上某点的位移自由响应信号为 $x_j(t)$
对j测点的响应信号进行等间隔采样, 可得数据序列 对N个测点采样
 $\{x_j(t_1) \quad x_j(t_2) \quad \cdots \quad x_j(t_{2N})\}, j = 1, 2, \dots, N$

数据矩阵与特征值矩阵之间的关系

$$\begin{bmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \cdots & x_1(t_{2N}) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \cdots & x_2(t_{2N}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_N(t_1) & x_N(t_2) & \cdots & x_N(t_{2N}) \end{bmatrix} = [\{\varphi\}_1 \quad \{\varphi\}_2 \quad \cdots \quad \{\varphi\}_{2N}] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & e^{\lambda_1 t_2} & \cdots & e^{\lambda_1 t_{2N}} \\ e^{\lambda_2 t_1} & e^{\lambda_2 t_2} & \cdots & e^{\lambda_2 t_{2N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{\lambda_{2N} t_1} & e^{\lambda_{2N} t_2} & \cdots & e^{\lambda_{2N} t_{2N}} \end{bmatrix}$$





模态参数识别 (ITD)

进行第二种方式采样，采样时间比第一种方式采样时间延滞 Δt

$$\text{即： } y_j(t_i) = x_j(t_i + \Delta t) \quad \gggg \quad \{y(t_i)\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\phi\}_r e^{\lambda_r(t_i + \Delta t)} = \sum_{r=1}^{2N} \{Q\}_r e^{\lambda_r t_i}$$

进行2N次采样后，可得相似的公式：

$$[Y] = [Q][E] \quad \boxed{[X] = [\phi][E]}$$

然后进行第三种方式采样，采样时间为 $t = t_i + 2\Delta t$

$$\text{即： } z_j(t_i) = x_j(t_i + 2\Delta t) = y_j(t_i + \Delta t) \quad \gggg \quad \{z(t_i)\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\phi\}_r e^{\lambda_r(t_i + 2\Delta t)} = \sum_{r=1}^{2N} \{R\}_r e^{\lambda_r t_i}$$

同理进行2N次采样后，可得相似的公式：

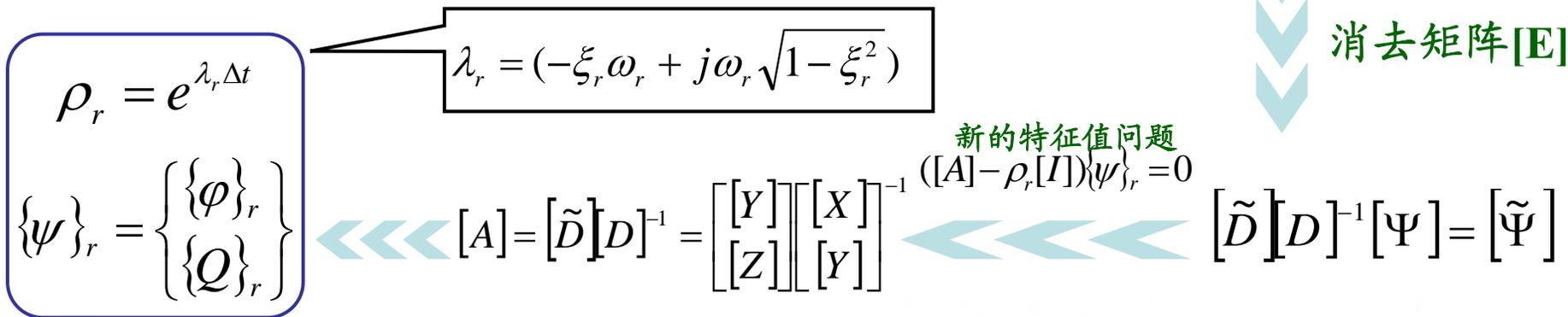
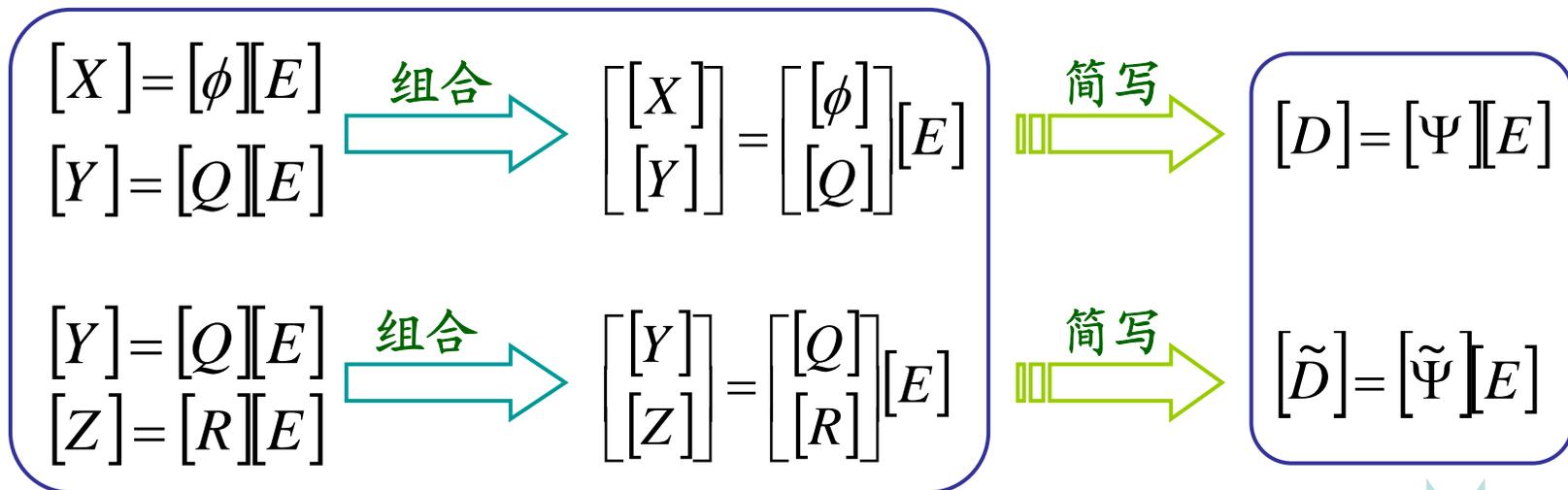
$$[Z] = [R][E]$$





模态参数识别 (ITD)

特征矩阵方程的建立





模态参数识别 (OMA)

为何要用OMA?

无法施加激励

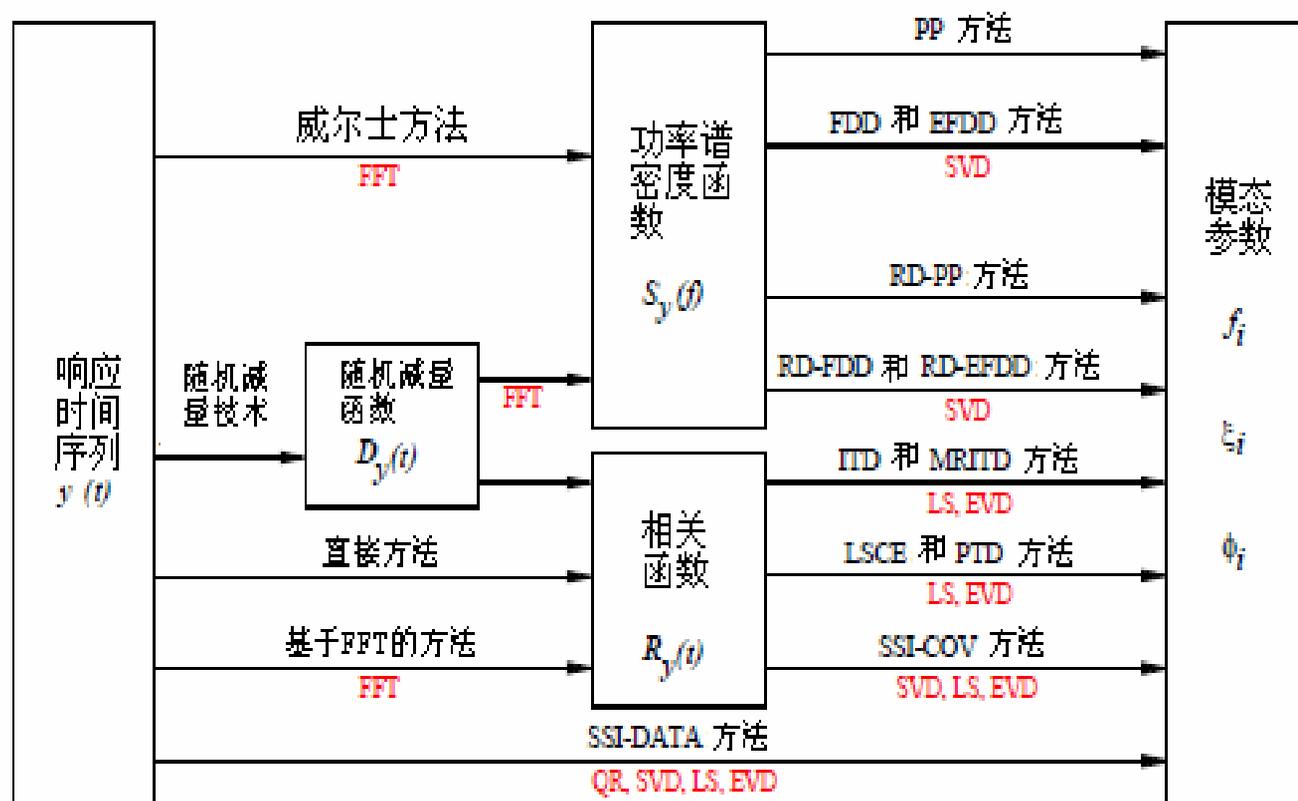
激励费用很昂贵





模态参数识别 (OMA)

运行模态参数识别法 (OMA)



数值技术的使用

FFT 快速傅里叶变换

SVD 奇异值分解

LS 最小二乘拟合

EVD 特征值特征向量分解

QR 正交分解





模态参数识别（基本理论）

相关函数:

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

傅里叶变换



$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)h(\lambda_2)R_f(\tau + \lambda_1 - \lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2$$

功率谱密度函数:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \overline{H(\omega)}H(\omega)S_f(\omega)$$

$$= |H(\omega)|^2 \square$$

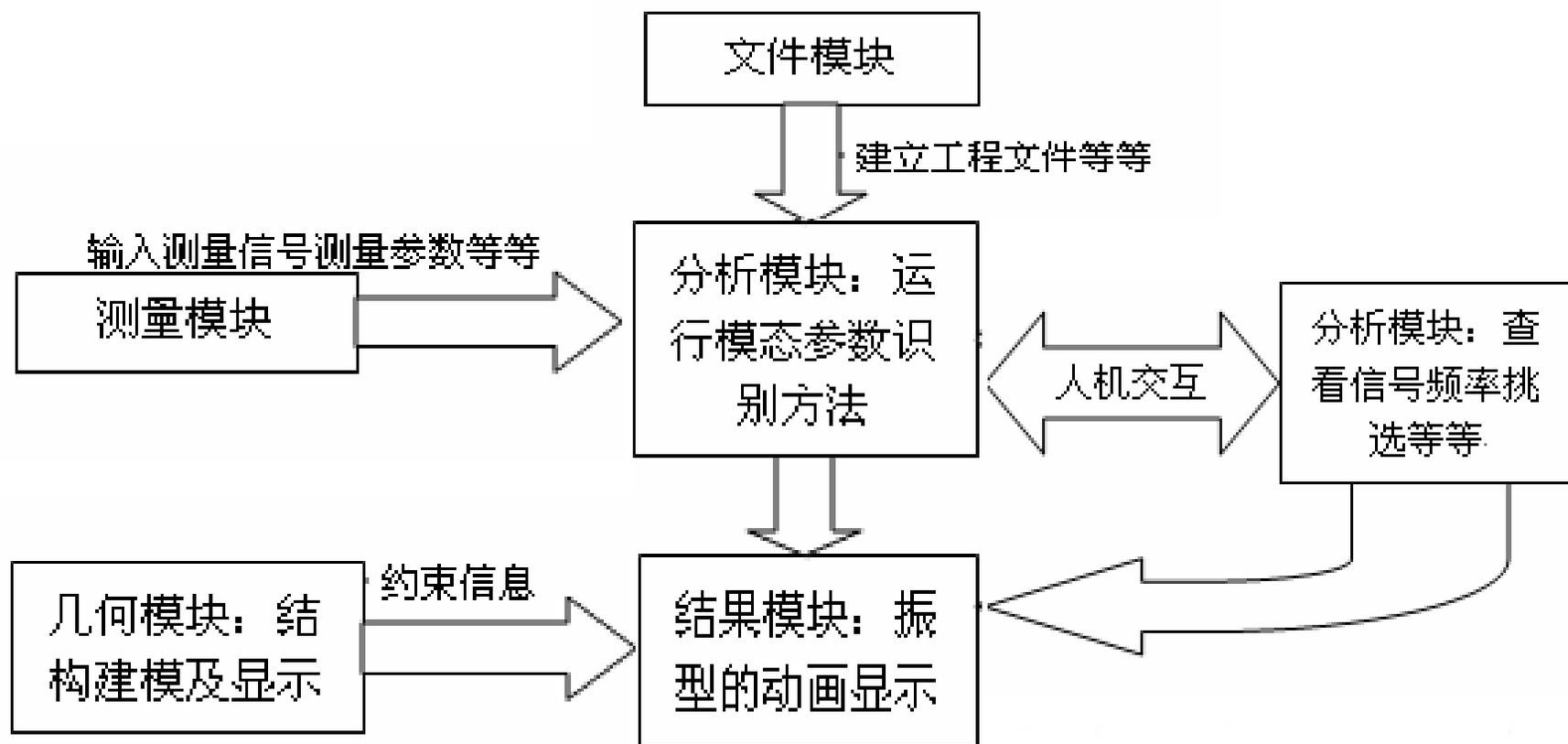
用白噪声激励时为常数





模态参数识别

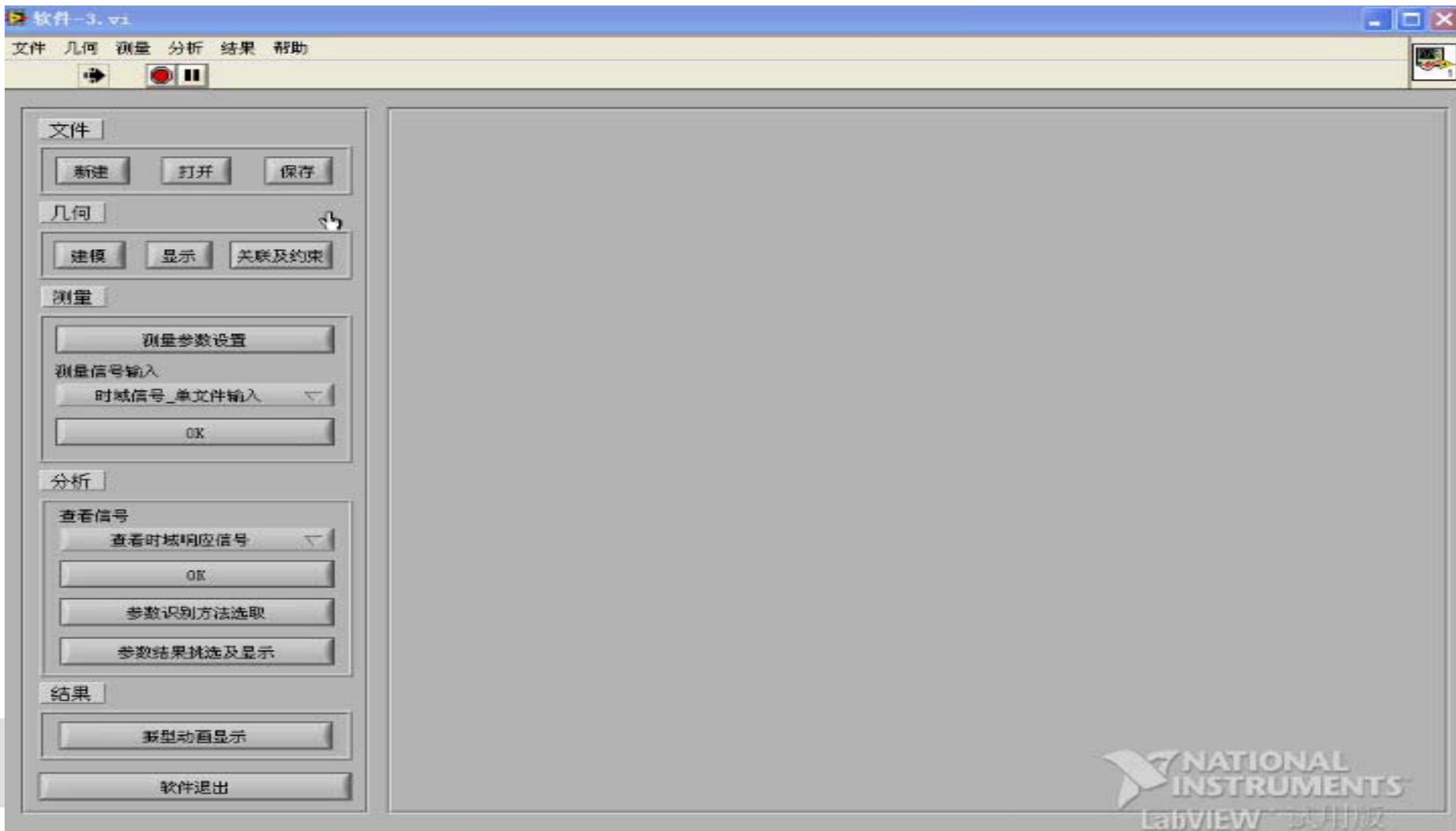
软件的整体构架





模态参数识别

软件介绍





模态参数识别 (OMA)

OMA识别方法研究

基于数据算法的主要优点是不需要任何预处理以获得谱或者协方差，这些方法直接从时域信号识别模态。

EFDD方法

对响应的功率谱进行奇异值分解，进而获得增强功率谱密度矩阵，得到模态频率和阻尼。

SSI-data法

基于协方差驱动的随机子空间方法是IV方法的SVD(奇异值分解)改进，它是真正的以子空间为基础的方法。

辅助变量 (IV) 方法

IV方法是以ARMA模型为基础，通过协方差矩阵解得后置AR系数矩阵，利用AR系数矩阵构造其伴随矩阵，对其进行特征值分解，得到系统特性值矩阵，识别模态参数。

SSI-Cov法





模态参数识别

EFDD方法

基本思想: EFDD方法基于FDD方法发展而来，该方法从频率响应函数构成的功率谱密度函数，应用奇异值分解技术分解功率谱密度矩阵，并采用最小二乘法基于增强功率谱密度（PSD）求解模态频率与阻尼，并进一步求解模态振型。





模态参数识别 (EFDD)

EFDD方法

输出响应的功率谱矩阵可以表示为:

$$G_{yy}(j\omega) = H^*(j\omega) G_{xx}(j\omega) H^T(j\omega)$$

其中频响函数矩阵 (FRF) 可以表示为部分分式的形式:

$$H(j\omega) = \sum_{r=1}^n \left[\frac{R_r}{j\omega - \lambda_r} + \frac{R_r^*}{j\omega - \lambda_r^*} \right]$$

将频响函数代入, 进行了一些数学处理之后, 响应谱矩阵可以简化成一个用极点留数表示的形式:

$$G_{yy}(j\omega) = \sum_{r=1}^n \left[\frac{A_r}{j\omega - \lambda_r} + \frac{A_r^H}{-j\omega - \lambda_r^*} + \frac{A_r^*}{j\omega - \lambda_r^*} + \frac{A_r^T}{-j\omega - \lambda_r} \right]$$





模态参数识别 (EFDD)

EFDD方法

通常情况下，一般结构的阻尼较小，即假设第 r 阶极点 $\lambda_r = -\sigma_r + ju_r$ 则满足 $\sigma_r \ll u_r$ 。

此时，第 r 阶留数矩阵 $A_r \approx d_r \phi_r^* \phi_r^T$ ，其中可以证明 d_r 是一个实数。另外，在第 r 阶模态频率 ω_r 的邻近谱线上，上式中最后两项的分母远大于前面两项的分母，因而可以近似忽略，则有：

$$\begin{aligned} G_{yy}(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \omega_r} &\approx \sum_{r=1}^n \left(\frac{d_r \phi_r^* \phi_r^T}{j\omega - \lambda_r} + \frac{d_r \phi_r^* \phi_r^T}{-j\omega - \lambda_r^*} \right) \\ &= \psi^* \text{diag} \left(2 \text{Re} \left(\frac{d_r}{j\omega - \lambda_r} \right) \right) \psi^T \end{aligned}$$





模态参数识别 (EFDD)

EFDD方法

由于响应谱矩阵为共轭对称矩阵，将上式转置，即可得到：

$$G_{yy}^T(j\omega) \approx \psi \operatorname{diag} \left(2 \operatorname{Re} \left(\frac{d_r}{j\omega - \lambda_r} \right) \right) \psi^H$$

$\omega \rightarrow \omega_r$

另一方面，当直接对响应谱矩阵进行奇异值分解时，也可以得到与上式相似表达式：

$$G_{yy}^T(j\omega) = U \Sigma U^H$$

在我们所关心的窄频带内只有有限的几个模态占主导地位。第 r 阶模态的增强PSD可定义为

$$\hat{G}(j\omega) = u_r^H G_{yy}^T u_r \approx 2 \operatorname{Re} \left(\frac{d_r}{j\omega - \lambda_r} \right)$$





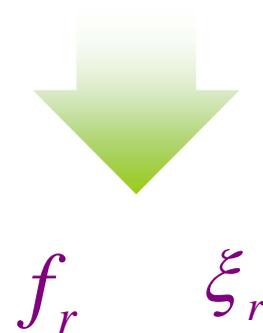
模态参数识别 (EFDD)

EFDD方法

为了从增强PSD中得到较高精度的模态频率和阻尼，采用最小二乘法来求解。将极点的表达式代入上式中，经变换得到矩阵形式的增强PSD函数

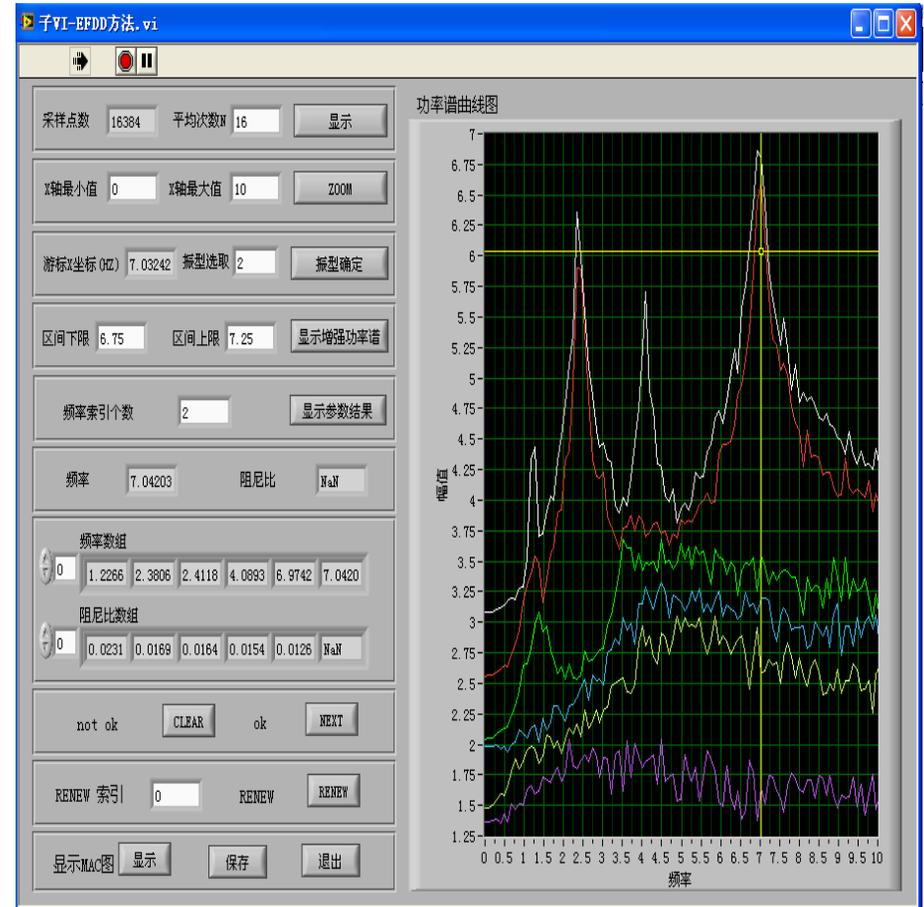
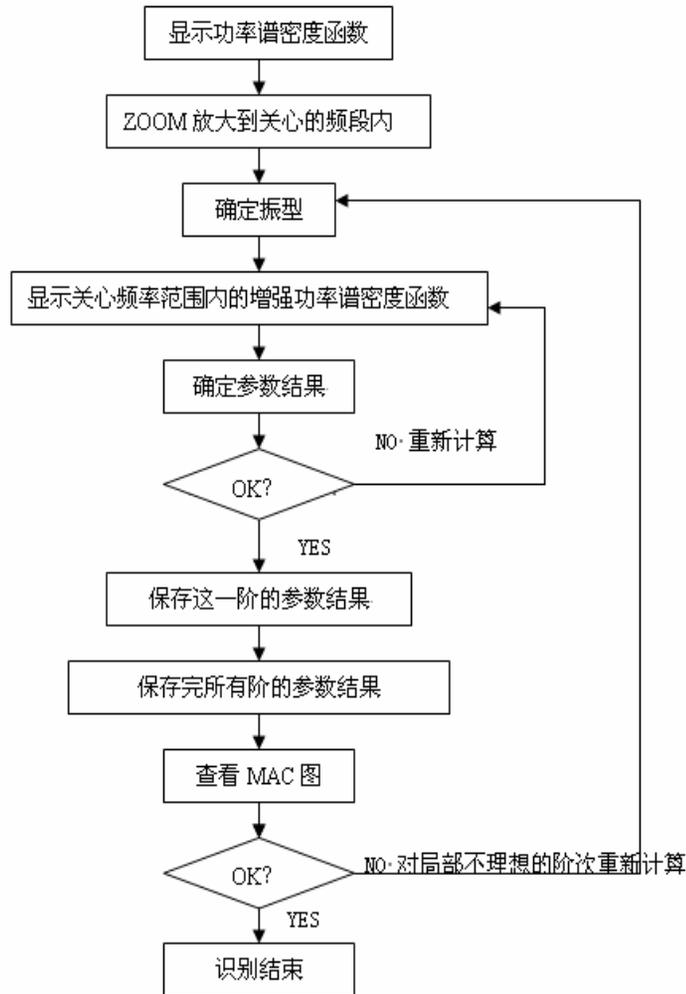
$$A \begin{bmatrix} \hat{G} \\ \omega \hat{G} \\ 1 \end{bmatrix} = -\omega^2 \hat{G}$$

$$A = [\sigma_r^2 + u_r^2 \quad -2u_r \quad -2d_r \sigma_r]$$





模态参数识别 (EFDD)





模态参数识别（IV法）

IV方法

基本思想：以ARMA模型为基础，构造时间响应信号的相关函数矩阵，利用最小二乘法解一超定方程组求出AR系数，再对AR系数的伴随矩阵进行特征值分解得到特征值，最后利用相关函数可以因式分解为系统矩阵的重要特性得到振型，从而识别出结构的模态参数。





模态参数识别 (IV法)

一个振动结构的ARMA模型可表示如下:

$$y_k + \alpha_1 y_{k-1} + \dots + \alpha_p y_{k-p} = e_k + \gamma_1 e_{k-1} + \dots + \gamma_p e_{k-p}$$



设置如下条件:

$$\forall i > 0: E[y_k y_{k-p-i}^T] + \alpha_1 E[y_{k-1} y_{k-p-i}^T] + \dots + \alpha_p E[y_{k-p} y_{k-p-i}^T] = 0$$

由噪声信号的平稳特性:

$$E[e_k y_{k-i}^T] = E[e_k] E[y_{k-i}^T] = 0$$

$$E[y_k y_{k-i}^T] = E[y_{k+i} y_k^T] = R_i$$

即: 残数 R_{p+i} 与现有测得的数据 R_i 不相关的





模态参数识别 (IV法)

相关函数计算: $\hat{R}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_{k+i} y_k^T$

引入参考输出: $y_k = \begin{pmatrix} y_k^{ref} \\ y_k^{\sim ref} \end{pmatrix} \quad y_k^{ref} = L y_k \quad L = (I_r \quad 0)$

参考输出相关函数

优点: 减少信号冗余, 使得算法更快速并且节省了计算机内存同时还能保证计算精度





模态参数识别 (IV法)

相关函数
矩阵

$$\alpha_1 R_{p+i, p+i-1}^{ref} + \dots + \alpha_p R_{p, p}^{ref}$$

AR系数
矩阵

IV方程:

$$\begin{pmatrix}
 R_p^{ref} & R_{p+1}^{ref} & \dots & R_{p+q-1}^{ref} \\
 R_{p+1}^{ref} & R_p^{ref} & \dots & R_{p+q-2}^{ref} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 R_{p+q-1}^{ref} & R_{p+q-2}^{ref} & \dots & R_q^{ref}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 (\alpha_1^b)^T \\
 (\alpha_2^b)^T \\
 \dots \\
 (\alpha_p^b)^T
 \end{pmatrix}
 = -
 \begin{pmatrix}
 R_{p+1}^{ref} \\
 R_{p+2}^{ref} \\
 \dots \\
 R_{p+q}^{ref}
 \end{pmatrix}$$





模态参数识别 (IV法)

利用相函数 $(G_m^{ref})^T$ 和 Λ_d^p 可以

$$R_i = C_i^T \Lambda_d^i$$

AR系数的伴随矩阵

对其特征值分解得到特征值 Λ_d 和特征向量

代入IV方程

$$\begin{pmatrix} (G_m^{ref})^T (A^T)^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (G_m^{ref})^T \Lambda_d^p + \alpha_p^b (G_m^{ref})^T \Lambda_d^{p-1} + \dots + \alpha_1^b (G_m^{ref})^T \Lambda_d & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & \dots & -\alpha_1 \end{pmatrix}$$

引入矩阵A的特征值分解:

定义:

$$\begin{pmatrix} (G_m^{ref})^T \Lambda_d^p \\ (G_m^{ref})^T \Lambda_d^{p-1} \\ \dots \\ (G_m^{ref})^T \Lambda_d \end{pmatrix} = \Psi \Lambda_d^p \Psi^{-1} = \Psi \Lambda_d^p \Psi^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} (G_m^{ref})^T \Lambda_d^p \\ (G_m^{ref})^T \Lambda_d^{p-1} \\ \dots \\ (G_m^{ref})^T \Lambda_d \end{pmatrix} = 0$$

Λ_d





模态参数识别 (IV法)

利用特征值 Λ_d :

$$\mu_i = e^{\lambda_i \Delta t} \Leftrightarrow \lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t}$$

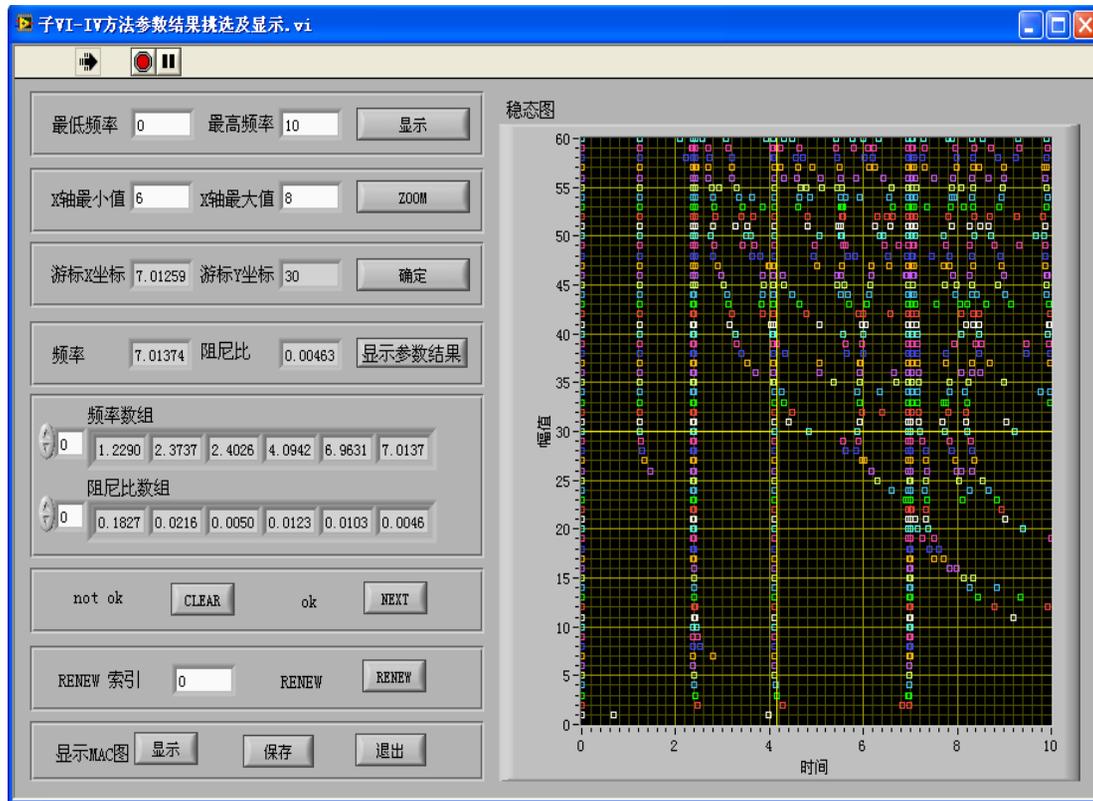
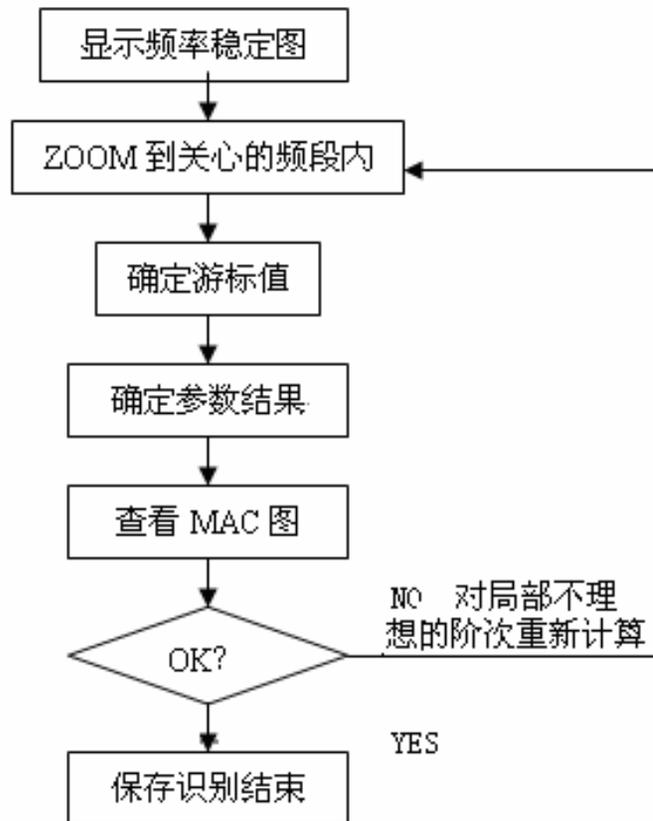
$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\xi_i \omega_i \pm j \sqrt{1 - \xi_i^2} \omega_i$$

求得频率和阻尼比





模态参数识别 (IV法)





模态参数识别

SSI-COV方法

基本思想: SSI-COV是IV方法的SVD拓展，对由输出响应的相关函数所构成的特普利兹矩阵进行奇异值分解得到扩展观测矩阵和反扩展随机控制矩阵，再由扩展观测矩阵得到系统矩阵从而识别出结构的模态参数。





模态参数识别 (SSI-COV)

构造特普利兹矩阵:

$$T_{1|i}^{ref} = \begin{pmatrix} R_i^{ref} & R_{i-1}^{ref} & \dots & R_1^{ref} \\ R_{i+1}^{ref} & R_i^{ref} & \dots & R_2^{ref} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{2i-1}^{ref} & R_{2i-2}^{ref} & \dots & R_i^{ref} \end{pmatrix}$$

利用协方差可以因式分解
为系统矩阵的重要特性

$$= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{i-1}G^{ref} & \dots & AG^{ref} & G^{ref} \end{pmatrix}$$
$$= O_i \Gamma_i^{ref}$$

扩展观测矩阵

反扩展随机控制矩阵





模态参数识别 (SSI-COV)

对特普利兹矩阵进行SVD分解:

$$T_{1i}^{ref} = USV^T = (U_1 \quad U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 S_1 V_1^T$$

忽略零奇异值及
对应的奇异向量

$$O_i = U_1 S_1^{1/2} T$$
$$\Gamma_i^{ref} = T^{-1} S_1^{1/2} V_1^T$$

类似于一个转换矩
阵，不妨简单令 $T=I$





模态参数识别 (SSI-COV)

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{i-1}G^{ref} & \dots & AG^{ref} & G^{ref} \end{pmatrix} = O_i \Gamma_i^{ref}$$

对比上等式:

$$C = O_i(1:l,:)$$

$$G^{ref} = \Gamma_i^{ref}(:, r(i-1):ri)$$

$$A = O_i(1:l(i-1),:) \overset{+}{\square} O_i(l+1:li,:)$$

$$A = \Psi \Lambda_d \Psi^{-1}$$
$$V = C\Psi$$

广义逆





模态参数识别

SSA-DAFA方法

核心思想

利用系统在环境激励下的响应数据构造hankel矩阵，通过对hankel矩阵的QR分解得到用R因子和Q因子表示的投影矩阵，对投影矩阵进行奇异值分解（SVD），得到广义观测矩阵和卡尔曼状态序列，最终求出系统矩阵，对系统矩阵进行特征值分解就可以得到系统的模态参数。





模态参数识别 (SSI-DATA)

$$H_{ref} = \begin{array}{cccc}
 y_0^{ref} & y_1^{ref} & \circ & \circ & y_{N-1}^{ref} \\
 y_1^{ref} & y_2^{ref} & \circ & \circ & y_N^{ref} \\
 \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
 y_{i-1}^{ref} & y_i^{ref} & \circ & \circ & y_{i+N-2}^{ref} \\
 \hline
 y_i & y_{i+1} & \circ & \circ & y_{i+N-1} \\
 y_{i+1} & y_{i+2} & \circ & \circ & y_{i+N} \\
 \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
 y_{2i-1} & y_{2i} & \circ & \circ & y_{2i+N-2}
 \end{array} = \begin{pmatrix} Y_p^{ref} \\ Y_{i|2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_p^{ref} \\ Y_f \end{pmatrix} \in R^{(r+l)i \times N}$$

参考点输出

测量点输出



模态参数识别 (SSI-DATA)

QR分解

正交矩阵

$$H^{ref} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow ri \\ \updownarrow r \\ \updownarrow l-r \\ \updownarrow l(i-1) \end{matrix}$$

$\leftrightarrow \quad \leftrightarrow \quad \leftrightarrow \quad \leftrightarrow$

$ri \quad r \quad l-r \quad l(i-1)$

下三角
矩阵





模态参数识别 (SSI-DATA)

投影矩阵

$$\mathbf{P}_i^{ref} = \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{31} \\ R_{41} \end{pmatrix} \mathbf{Q}_1^T \mathbf{P}_{i-1}^{ref} = \begin{pmatrix} R_{41} & R_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \end{pmatrix}$$

广义观测矩阵

$$\mathbf{P}_i^{ref} = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T$$

$$\mathbf{O}_i = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2} \mathbf{I}$$

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{O}_i^+ \mathbf{P}_i^{ref}$$

$$\mathbf{O}_{i-1} = \mathbf{O}_i (1:l(i-1), :)$$

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{O}_{i-1}^+ \mathbf{P}_{i-1}^{ref}$$

卡尔曼状态序列





模态参数识别 (SSI-DATA)

系统矩阵 \rightarrow A

输出矩阵 \rightarrow C

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} X_i^+$$

对系统的状态矩阵A进行特征值分解

$$A = \Psi \Lambda \Psi^{-1}$$

f_r ξ_r

汉克矩阵的一行

$$Y_{i|i} = \begin{pmatrix} R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{pmatrix}$$





模态参数识别

时间序列分析法

利用参数模型对有序的随机采样数据进行处理，从而识别模态参数。实质就是在白噪声激励下识别时序模型的系数。常用的模型有自回归（AR）模型、滑动平均（MA）模型和自回归滑动平均（ARMA）模型三种。

小波变换法

信号的时间-尺度（时间-频率）变换方法，基本思想是先寻找一个满足一定条件的基本小波，然后通过基本小波的平移和伸缩构成小波基，再利用小波基去逼近所要研究的信号，从而达到时频局部化分析的目的。

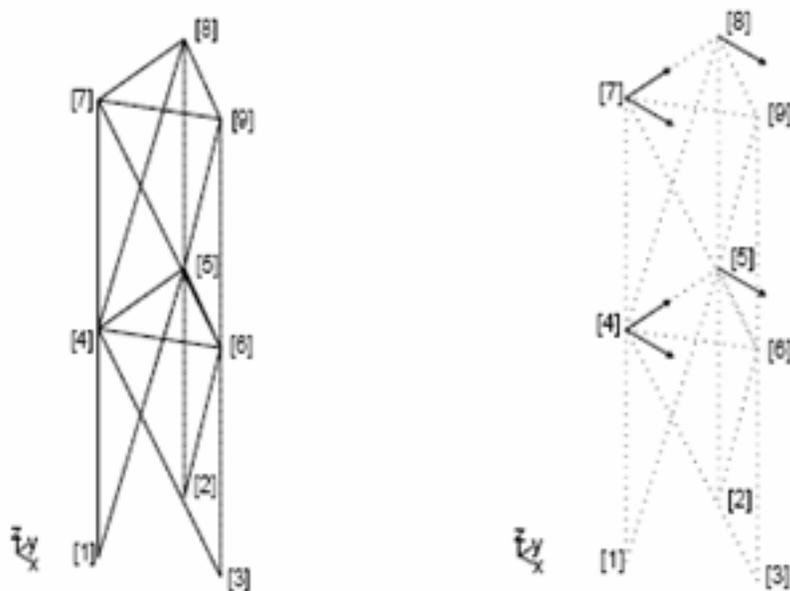




模态参数识别（软件）

塔形结构

右图6个箭头为6个测量点，模拟结构受到环境激励，即对6个点（4号点-9号点）在x-y平面内就x和y方向施加互不相关的白噪声力，并基于状态空间模型的仿真技术以产生随机响应。采得的6个通道的加速度响应信号，采样时间间隔为0.01秒，采样点数为16384。



塔形结构示意图和输出点布置图

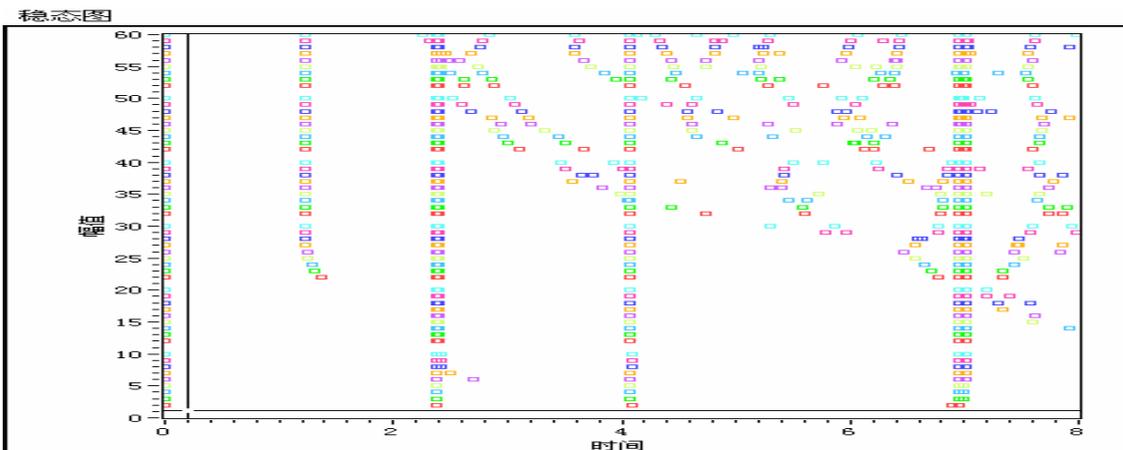




模态参数识别（软件）

塔形结构-SSI-COV方法

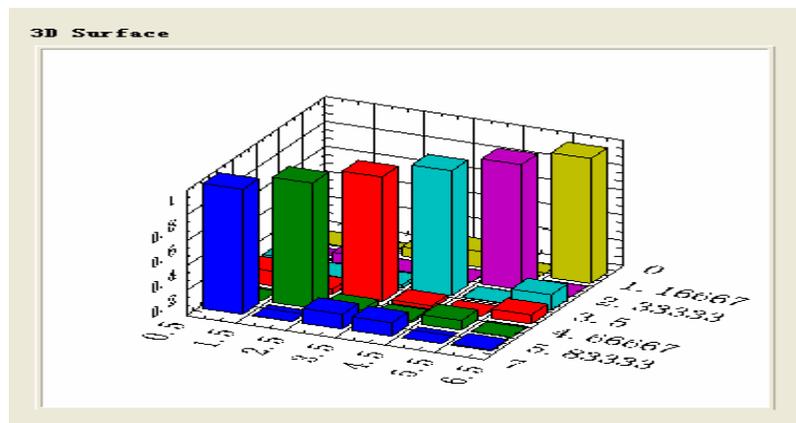
算例中采样点数为16384，选取相关函数的计算长度为16184，选取4个通道作为参考通道，即通道3-通道6，循环次数选取60。



SSI-COV法与理论值的识别结果对比

模态阶次	频率 (Hz)			阻尼比 (%)		
	理论	SSI-COV法	误差 (%)	理论	SSI-COV法	误差 (%)
1	1.221	1.2228	0.147	1	1.500	50
2	2.375	2.3753	0.013	1	1.124	12.4
3	2.403	2.4042	0.050	1	1.005	0.5
4	4.083	4.0787	0.105	1	1.016	1.6
5	6.936	6.9577	0.313	1	0.958	4.2
6	7.015	7.0264	0.163	1	0.984	1.6

SSI-COV方法频率稳定图



SSI-COV方法识别振型MAC图





模态参数识别（软件）

振型动画显示

子VI-振型动画显示.vi

DoModalActiveX

模态阶数: 6

频率: 1.23495, 2.37519, 2.40356, 4.07441

阻尼比: 0.07808, 0.01021, 0.00938, 0.01135

模态阶数选取: 第6阶振型

步长: 5

刷新率: 20

振型放大倍数: 0.2, 2, 4, 5

Move, move one step, Stop, 退出

The image shows a 3D visualization of a modal shape (vibration mode) of a structure. The structure is a rectangular frame with a vertical central member. Nodes are numbered 1 through 9. Node 1 is at the top center, node 2 is at the bottom center, node 3 is at the bottom left, node 4 is at the top left, node 5 is at the top right, node 6 is at the bottom right, node 7 is at the top center, node 8 is at the top right, and node 9 is at the top left. Displacement vectors are shown as red arrows originating from the nodes. A green arrow points to the right, indicating the direction of the mode shape. A mouse cursor is visible near the bottom center of the structure.



模态参数识别（应用）



航空



航天



桥梁



工程结构





模态参数识别（应用）



(a)



(b)



(c)

(a) Jindo cable-stayed bridge;

(b) Physical model on shaking table (EERC, Univ. Bristol)

(c) Physical model on shaking table (ISMES)

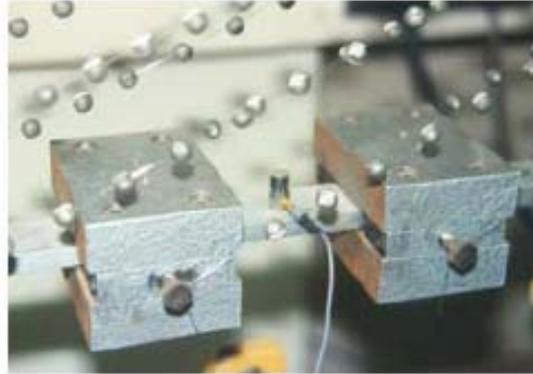




模态参数识别（应用）



(a)



(b)



(c)

(a) Application of electro-dynamic shaker

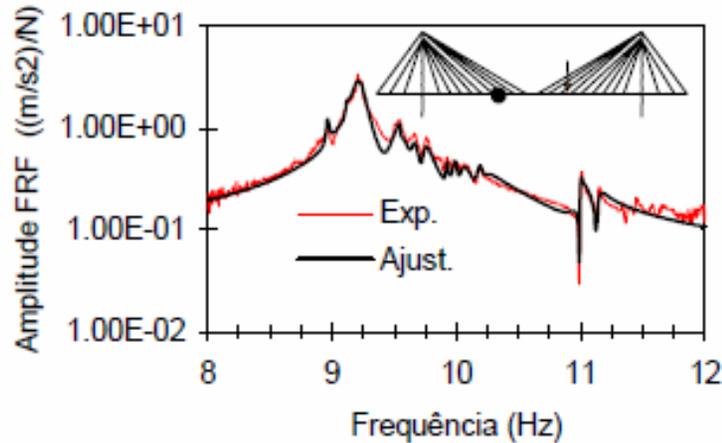
(b) Response measurement with piezoelectric accelerometer

(c) Measurement of cables tensions

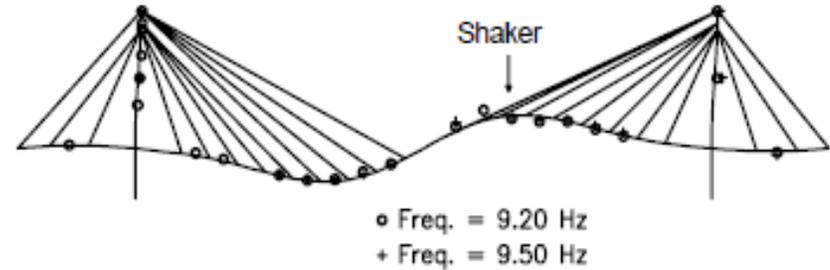




模态参数识别（应用）



(a)



(b)

(a) Amplitude of FRF relating vertical acceleration at 1/3 span with the vertical force applied at the opposite 1/3 span;

(b) Identified pattern of a set of multiple modes





模态参数识别（应用）

激励

- a) Impulse hammer
- b) Impulse excitation device for bridges
- c) Electrodynamics shaker over three load cells
- d) Eccentric mass vibrator
- e) Servo-hydraulic shakers to excite bridges (vertically)



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)





模态参数识别（应用）

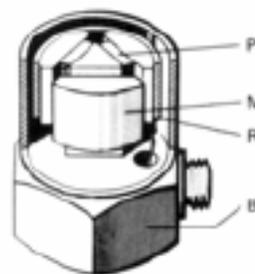
加速度计

Schematic cross-section of
(a) piezoelectric

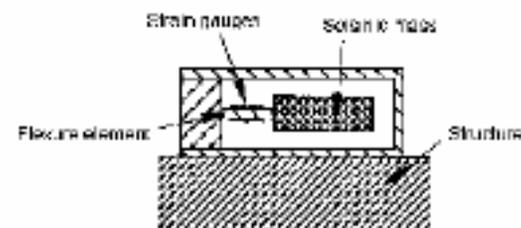
(b) Piezoresistive

(c) capacitive

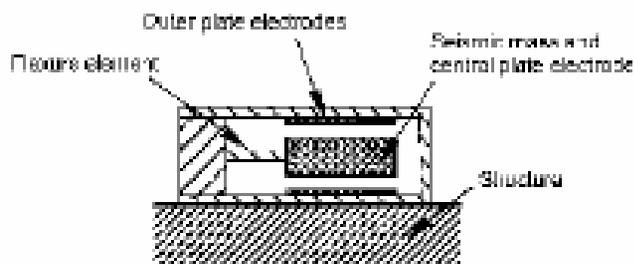
(d) force balance
accelerometers



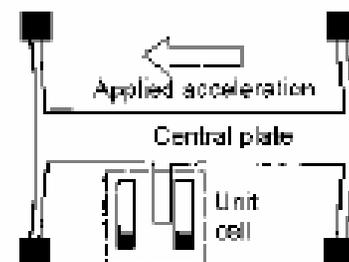
(a)



(b)



(c)



(d)





有限元模型修正

模型修正的原因

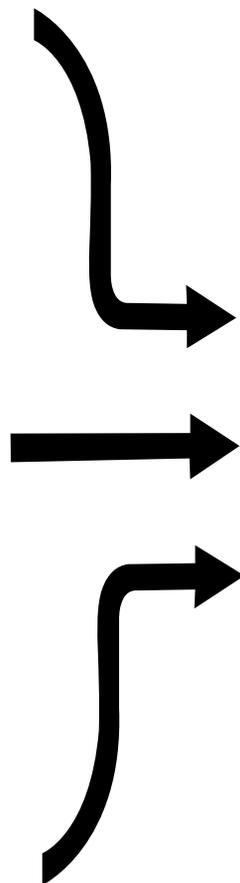
虽然近年来有限元方法以及有限元分析技术取得了长足的进步，但由于分析过程中存在着众多的不确定性因素以及引入了多种假设，使得有限元模型必然存在误差，例如边界条件的误差、物理参数的误差、单元类型的选择和单元的划分不合适、实际工作状态和分析所假设的状态不一致等，使得有限元分析结果不可能完全真实地反映结构特性。





模态参数识别

有限元模型误差来源



模型结构误差

模型参数误差

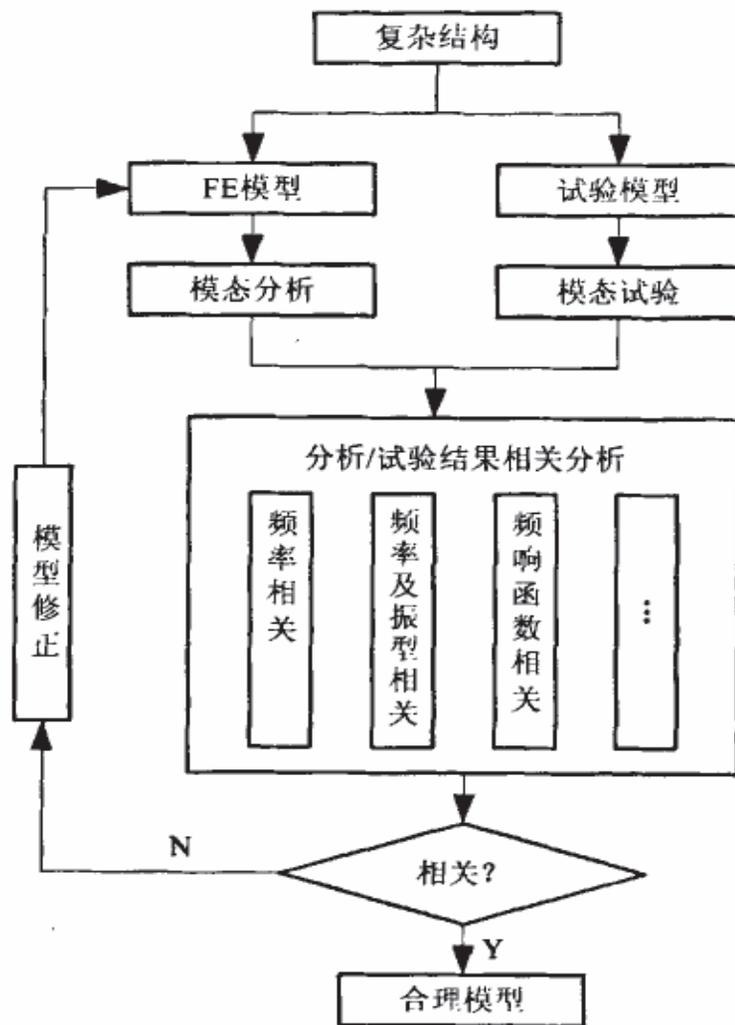
模型阶次误差





有限元模型修正

利用有限元分析建立结构初始分析模型（priori knowledge），再利用试验模态分析结果改善其精度，从而获得高精度的有限元模型，就是有限元模型修正技术。





有限元模型修正





有限元模型修正

有限元修正的目的是使有限元模型在一定的频域范围内符合实际情况





有限元模型修正

有限元模型修正就是一个系统物理参数识别的问题。Astrom & Eykhoff曾定义所谓系统辨识即是根据实际系统测试中的输入输出信息，在一组预先给定的系统参数集合中找到合适的参数，使之与实际系统等价。

定义一个标量误差函数(error function)

$$V = V(y_A(\Phi), y_m)$$

常常还引入一些约束，如刚度、质量矩阵的正交性，对称性

$$J = V(y_A(\Phi), y_m) + \sum_{i=1}^m \alpha_i M_i$$

求解：LSM、Maximum Likelihood Method、Bayes' Method
Genetic Algorithm、Simulted Annealing





有限元模型修正

模型修正方法

矩阵法

以系统的总体矩阵或子结构的总体矩阵为修正对象

神经网络法

设计参数法

以总体矩阵的部分元素或系统设计参数如密度、弹性模量、截面积等作为修正对象。





有限元模型修正（矩阵法）

Reference Basis Method: Berman、Baruch、Kabe等

基本思想

以一个参数作为不可改变的参考基准（可以是质量、刚度或者测试所得的振型），通过最小化目标函数对剩余参数分别进行修正

优点

精度高、执行容易

缺点

所得修正模型物理意义不明确，丧失了原矩阵的带状和稀疏性





有限元模型修正（矩阵法）

构建如下目标函数:

其中 M_A 为修正前的质量矩阵， λ_{ij} 为Lagrange乘子， m 为实测模态数

$$J_M = \left\| M_A^{-1/2} (M - M_A) M_A^{-1/2} \right\| + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (\Phi^T M \Phi - I)_{ij}$$

通过优化 J_M 的质量矩阵即求得修正后的质量矩阵:

$$M = M_A + M_A \Phi m_A^{-1} (I - m_A) m_A^{-1} \Phi^T M_A$$

$$m_A = \Phi^T M_A \Phi$$





有限元模型修正（矩阵法）

通过使修正后的质量阵满足正交性条件，刚度、质量阵满足对称性条件，第二次构建如下目标函数：

$$J_K = \left\| M_A^{-1/2} (K - K_A) M_A^{-1/2} \right\| + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m \lambda_{Kij} (K\Phi - M\Phi\Phi)_{ij} +$$

p 为模型
自由度阶数

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_{oij} (\Phi^T K \Phi - \Lambda)_{ij} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^i \lambda_{Sij} (K - K^T)_{ij}$$

通过优化 J_K 即求得修正后的刚度矩阵：

$$K = K_A + (\Delta + \Delta^T)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} M\Phi (\Phi^T K_A \Phi + \Lambda) \Phi^T M - K\Phi^T \Phi M$$





有限元模型修正（矩阵法）

Kabe引入了原模型的连接信息，构造目标函数如下：

$$L = \varepsilon + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \left\{ \left(\sum_{l=1}^n K_{Ail} \gamma_{il} \phi_{lj} \right) - E \right\} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m u_{ij} (\gamma_{ij} - \gamma_{ji})$$

传统的参考基准法与其他方法相比的主要优点：一般采用直接求解的方法，计算效率很高，非常适合大型超高自由度结构的模型修正。最大缺点：修正后的模型刚度和质量矩阵物理意义不明确，丧失了原来的对称性和稀疏性。虽然其中有些算法为满足其中的某项特性，如对称性和稀疏性，进行了改进，但这种改进是以计算成本和存储容量的迅速提高为代价的。





有限元模型修正（设计参数法）

灵敏度分析最常用！

基本思想

通过构造理论模型与实际模型之间在同一激励下的动力特性的误差(目标函数)，然后选择一定的修正量使该误差满足最小化来达到修正的目的

优点

模型修正后的物理意义明显，解决了矩阵型方法引起的问题，结果便于解释，具有明显的工程意义

缺点

参数众多，独立方程数不够，从而有可能导致解的不唯一甚至解的不存在





有限元模型修正（设计参数法）

灵敏度分析基础：Fox、Kapoor、Nelson、Lim、Ojalvo等推导了特征值、特征向量对设计参数的灵敏度计算公式，大大推动了基于灵敏度的有限元模型修正技术的发展。

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta_j} = \phi_i^T \left(\frac{\partial K}{\partial \theta_j} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial \theta_j} \right) \phi_i$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \theta_j} = \sum_{l=1}^n \alpha_{ijl} \phi_l$$

$$\alpha_{ijl} = \begin{cases} \frac{\phi_l^T \left[\frac{\partial K}{\partial \theta_j} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial \theta_j} \right] \phi_i}{\lambda_i - \lambda_l}, & i \neq l \\ -\frac{1}{2} \phi_i^T \frac{\partial M}{\partial \theta_j} \phi_i, & i = l \end{cases}$$





有限元模型修正（设计参数法）

有限元模型共有个 n 个待修正的设计参数表示为：

$$p = [p_1, p_2 \cdots p_n]^T$$

结构的总体刚度阵和质量阵可以用设计参数 p 的函数表示：

$$K = f_K(P) \quad M = f_M(P)$$

对应的特征量可以表示为设计参数的函数

可以是任意的特征量，如模态频率、模态振型、振型相关系数，或者他们之间的组合

$$f = F(K, M) = F(f_K(P), f_M(P)) = f_p(p)$$





有限元模型修正（设计参数法）

模型修正问题转化为如下优化问题：

$$\text{Min} \|W_f R(p)\|^2, R(p) = \{f_e\} - \{f_p(p)\}$$

$$\text{s.t. } VLB \leq p \leq VUB$$

灵敏度矩阵

在初始设计点将 $f_p(p)$ 展开为待修正参数的一阶泰勒表达式：

$$f_p(p) = f_p(p_0) + S\Delta p \quad S = \left. \frac{\partial f_p(p_0)}{\partial p} \right|_{p=p_0}$$

$$W_f S\Delta p = W_f R(p_0) = W_f (f_e - f_p(p_0))$$

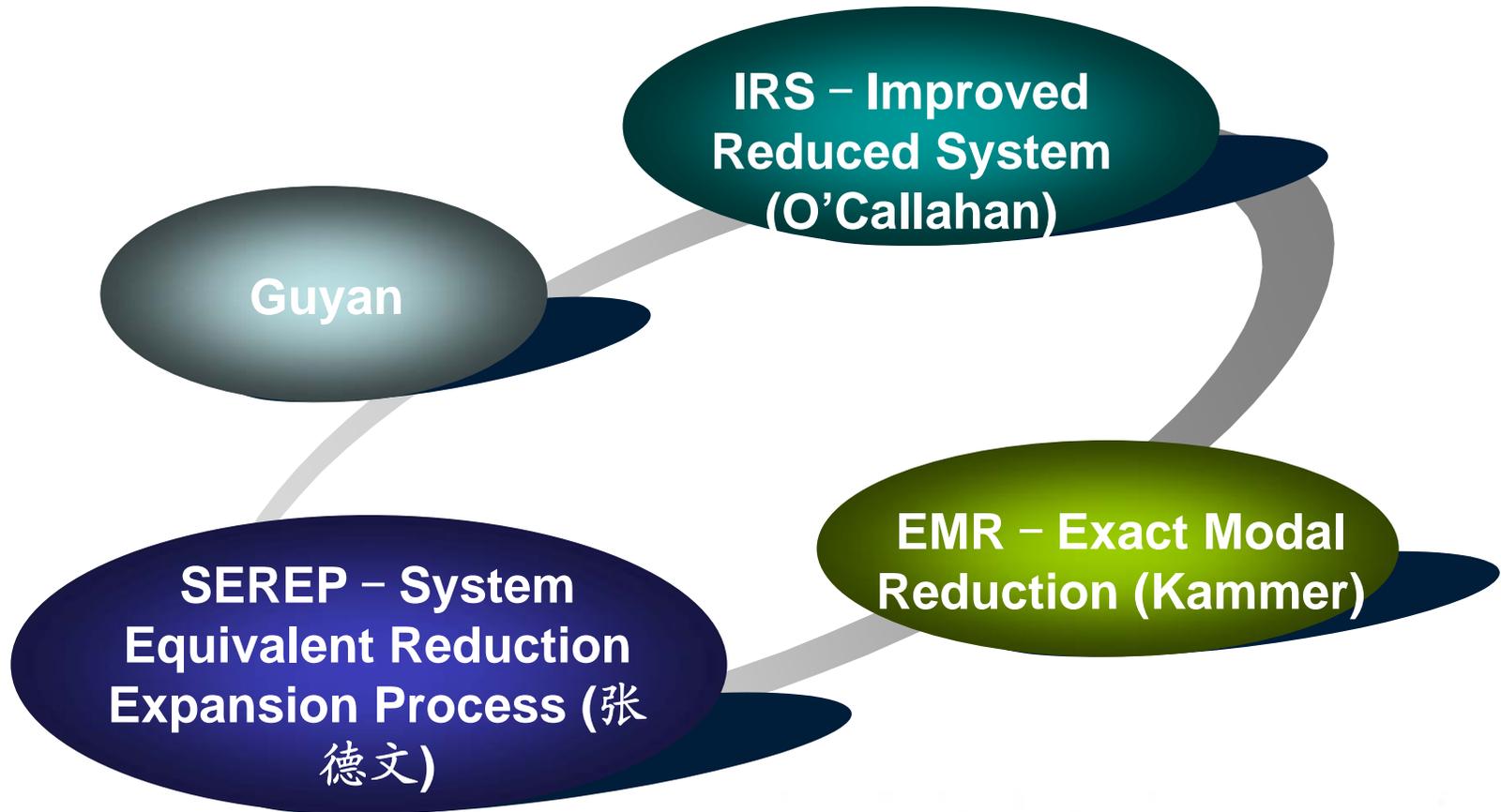
拉格朗日乘子法





有限元模型修正

模型缩聚和模态扩展问题:





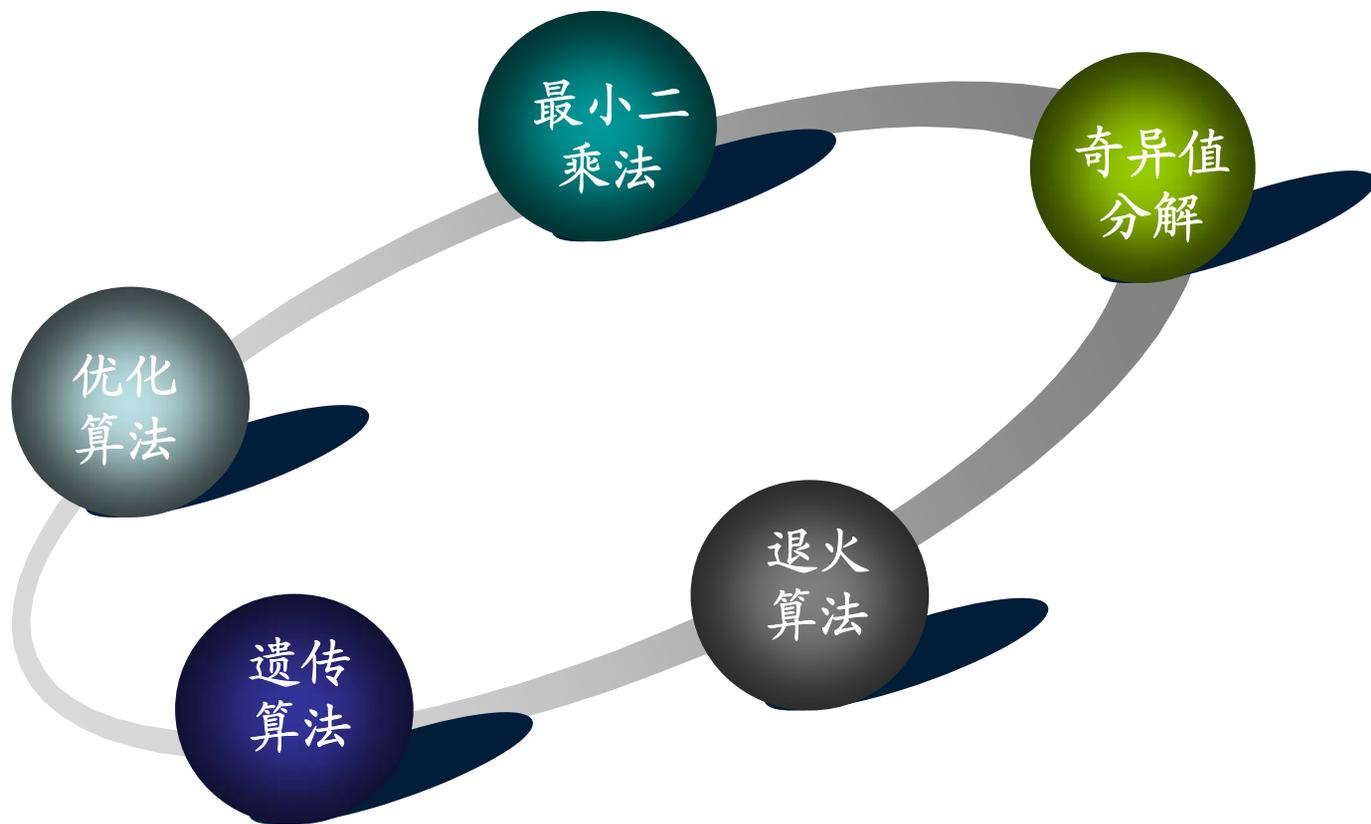
有限元模型修正

结构模型修正作为反问题的一种，测量中的误差以及模态截断所引起的误差对修正结果有着重大影响。并且测量数据的不完整也会导致修正结果的不唯一性



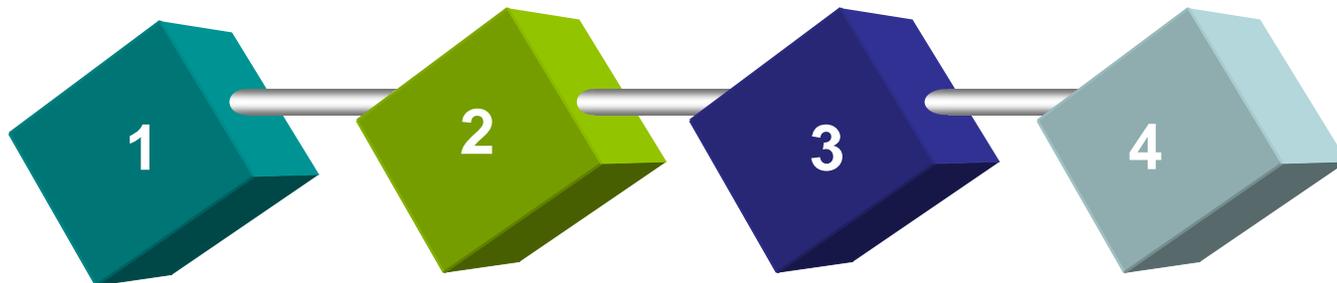


有限元模型修正（算法）





有限元模型修正（基于“正问题”）



通过试验设计，构造待修正参数样本点

计算对应各组样本点的特征量

构造特征量对设计参数的响应面模型

在响应面上寻找与试验结果相一致的设计参数





有限元模型修正

修正参数选得过多，在修正计算时的工作量就会很大，并可能引起计算过程中的病态数值计算问题

修正参数选得不够多，可能漏掉引起误差的真正所在

误差定位法





有限元模型修正（误差定位法）

经验法

工程技术人员凭借经验判断出可能引入误差的部位，再对该部位有关的元素加以修正，从而得到满意的有限元模型

分析法

常用的有误差矩阵法、单位矩阵法、模态残余力法、能量法及摄动/迭代法等，根据分析计算的结果确定误差存在的部位，继而选择合适的修正方法进行修正





有限元模型修正（最终目的）

有限元修正的目的是使有限元模型在一定的频域范围内符合实际情况



最终目的

全部频域范围内





有限元模型修正（存在的问题）

1

目前大多数修正方法基本上是针对某一具体问题而言的，适应范围较窄，很难将其推广到一般的普遍性问题。尤其是具有较高自由度数的大型复杂结构模型中修正参数众多，对修正算法的效率提出了很高的要求。

2

测量数据的不完整不完备导致了修正结果的不唯一性，而扩展后的模态能否逼近真实的模态在很大程度上影响着修正结果的精度。模态扩展往往要用到原模型刚度和质量矩阵等参数，修正和扩展相互耦合。同样缩聚的模型面临同样的难题。

3

结构模型修正作为反问题的一种，测量中的误差以及模态截断所引起的误差对修正结果有着重大影响，这个难题也是巨大的挑战。





Thank You !

史治宇 教授

南京航空航天大学 航空宇航学院

Email: zyshi@nuaa.edu.cn



结构动力学工作室

Structural Dynamic Studio